

Zadanie: KOM

Kompresja drzew binarnych

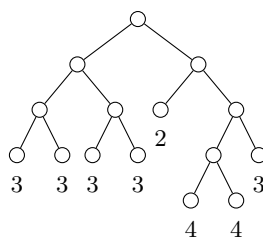


Eliminacje do IOI, dzień drugi. Plik źródłowy kom.* Dostępna pamięć: 128 MB.

13.08.2020

Wprowadzenie

Pełne drzewo binarne składa się z pewnej liczby węzłów. Każdy węzeł ma dwóch synów, lewego i prawego, lub też nie ma żadnych synów i wtedy nazywamy go liściem. Jeśli węzeł v jest synem węzła u , to węzeł u nazywamy ojcem węzła v . Korzeniem drzewa nazywamy węzeł, który nie ma ojca. Na rysunkach korzeń zazwyczaj przedstawia się na szczycie drzewa. Przykładowo, poniższy rysunek przedstawia pełne drzewo binarne o 15 węzłach i 8 liściach.

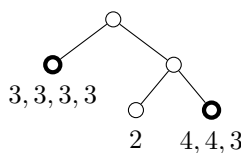


Poddrzewem drzewa binarnego nazywamy dowolny węzeł wraz z wszystkimi jego potomkami, czyli synami, synami synów itd. Poddrzewa nazwiemy rozłącznymi, jeśli nie mają żadnych wspólnych węzłów. Głębokością węzła nazywamy liczbę węzłów na ścieżce od korzenia do tego węzła, nie licząc korzenia. Tak więc na przykład drzewo na powyższym rysunku ma liście położone kolejno na głębokościach 3, 3, 3, 3, 2, 4, 4, 3. Zauważmy, że znając głębokości kolejnych liści, możemy jednoznacznie odtworzyć kształt drzewa.

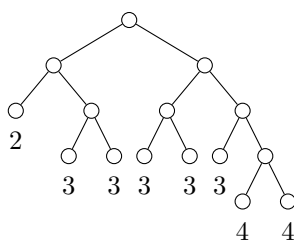
Zadanie

Bajtazar jest informatykiem i zajmuje się kompresją danych. Ostatnio pracuje nad kompresją z użyciem binarnych kodów prefiksowych, które można reprezentować właśnie w postaci pełnych drzew binarnych. Jeśli do kompresji używamy pewnego kodu prefiksowego, to takie drzewo opisujące kod również należy umieścić w kompresowanym pliku, zatem warto, żeby jego opis był jak najmniejszy.

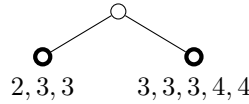
Bajtazar wymyślił sposób kompresji pełnych drzew binarnych. Wybiera on mianowicie pewną liczbę parami rozłącznych poddrzew, z których każde ma liście albo na jednej głębokości, albo na dwóch głębokościach różniących się o 1, i każde z tych poddrzew zastępuje liściem. Bajtazar kompresuje drzewo w taki sposób, aby wynikowe drzewo składało się z jak najmniejszej liczby węzłów. Przykładowo, w wyniku kompresji powyższego drzewa otrzymuje się następujące drzewo o pięciu węzłach:



Z punktu widzenia efektywności kodu prefiksowego nie jest istotne, jak dokładnie wygląda jego drzewo binarne, a jedynie na jakich głębokościach znajdują się liście w tym drzewie. Powiemy zatem, że dwa drzewa są równoważne, jeśli mają ten sam multizbiór (czyli zbiór z powtórzeniami) głębokości liści. Przykładowo, poniższe pełne drzewo binarne ma liście na takich samych głębokościach, jak to wcześniejsze:



a w wyniku jego kompresji otrzymujemy drzewo o tylko trzech węzłach:



Bajtazar ma pełne drzewo binarne T opisujące pewien kod prefiksowy. Chciałby teraz skonstruować takie równoważne mu drzewo T' , żeby po kompresji drzewa T' uzyskać jak najmniejszą liczbę węzłów.

Wejście

W pierwszym wierszu wejścia znajduje się jedna liczba całkowita n ($1 \leq n$), oznaczająca liczbę liści w pełnym drzewie binarnym T . W drugim wierszu znajduje się ciąg n nieujemnych liczb całkowitych l_1, \dots, l_n , pooddzielanych pojedynczymi odstępami, oznaczających głębokości kolejnych liści (w kolejności od lewej do prawej) w tym drzewie.

Wyjście

Twój program powinien wypisać dwa wiersze. W pierwszym wierszu powinna znaleźć się jedna liczba całkowita oznaczająca minimalną liczbę węzłów w skompresowanym drzewie otrzymanym z pewnego pełnego drzewa binarnego T' równoważnego drzewu T . W drugim wierszu należy wypisać ciąg głębokości liści drzewa T' , w kolejności od lewej do prawej. Jeśli jest więcej niż jedna poprawna odpowiedź, Twój program powinien wypisać dowolną z nich.

Przykład

Dla danych wejściowych:

8
3 3 3 3 2 4 4 3

jednym z poprawnych wyników jest:

3
2 3 3 3 3 3 4 4

Testy „ocen”:

1ocen: $n = 10$;

2ocen: $n = 1024$, wszystkie liście znajdują się na głębokości 10;

3ocen: $n = 500\,000$, głębokości liści są kolejnymi liczbami od 1 do $n - 1$, ostatni liść ma głębokość $n - 1$, jak przedostatni.

Ocenianie

Zestaw testów dzieli się na następujące podzadania. Testy do każdego podzadania składają się z jednej lub większej liczby osobnych grup testów.

Program, który wypisze poprawny wynik w pierwszym wierszu, ale niepoprawny w drugim, otrzyma 50% punktów za test. Wymagane jest jednak, by w drugim wierszu wypisał głębokości liści z wejścia, w dowolnej kolejności.

Podzadanie	Warunki	Liczba punktów
1	$n \leq 20$	20
2	$n \leq 2000$	60
3	$n \leq 500\,000$	20